

**SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA
CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO
(PARTE A) (50 minutos - 10 Puntos)**

| APELLIDOS Y NOMBRE | SECCION | NOTA |
|--------------------|---------|------|
| | | |

1. Muestre el valor final de s en el siguiente fragmento de Programa:

```
n=272013;  
s=0;  
while n~=0  
    k=rem(n,10);  
    if rem(k,2)==1  
        s=s+k;  
    end  
    n=fix(n/10);  
end  
disp(s)
```

Solución

| |
|----|
| 11 |
|----|

2. Muestre los valores de α para los cuales el siguiente sistema es incompatible (inconsistente) :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 3 \\ 2\alpha + 3 \\ 7\alpha - 3 \end{bmatrix}$$

Solución

| |
|-----------------|
| $\alpha \neq 6$ |
|-----------------|

3. Elaborar una función llamada **evalua.m** para construir la siguiente matriz cuadrada A. El argumento de entrada debe ser **n** y el argumento de salida la matriz **A**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & \dots \\ 4 & 7 & 10 & \dots & \dots \\ 7 & 11 & 15 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Solución

```
function A=evalua(n)
for i=1:1:n
for j=1:1:n
if (i==1) A(i,j)=j;
else
if (j==1) A(i,j)=A(i-1,2);
else A(i,j)=A(i,j-1)+i;
end
end
end
end
end
```

4. Mediante un programa en Matlab determine el número de términos necesarios para aproximar $\cos(x)$ con 9 cifras decimales exactas, usando la aproximación de Taylor, para $x=\pi/5$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots\dots$$

Solución

```
cde=9; % cifras decimales exactas
s=0;
nt=1; % Numero de términos
error=1;
x=pi/5;
while (abs(error)>(0.5*10^-cde))
error=(-1)^(nt+1)*(x^(2*(nt-1)))/factorial(2*(nt-1));
s=s+error;
nt=nt+1;
end
disp('El numero de términos necesarios es:');
nt-1
```

5. Escriba los comandos en MATLAB para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c + d = e$$

$$2b = 15 - c$$

$$c + d + 3c = 18$$

$$a + 4b + c = 15e$$

$$5a + 3b + 4c - 2d + 5e = 18$$

Solución

```
A=[ 1 1 1 1 -1
    0 2 1 0 0
    0 0 4 1 0
    1 4 1 0 -15
    5 3 4 -2 5];
b=[0 15 18 0 18]';
x=A\b
```

6. Muestre el valor de T al final del siguiente fragmento de programa:

```
n=4;
r=n:-1:1;
c=r';
T=zeros(4,4);
t=n;
for i=1:4
    T(i,i:end)=r(1:t);
    T(i:end,i)=c(1:t);
    t=t-1;
end
```

Solución

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Se pretende calcular el área de un círculo de radio aproximadamente de 25 cm., con error absoluto, que en módulo, no exceda a 0.05 cm^2 . Con qué precisión absoluta se debe medir el radio del círculo y cuántas cifras decimales en el valor aproximado de π ?

Solución

$$A = \pi r^2 \quad \varepsilon_A \leq 0.05$$

$$\varepsilon_r = ? \quad \varepsilon_\pi = ?$$

Principio de igual efecto

$$\frac{\varepsilon_A}{2} = \frac{\partial A}{\partial r} \varepsilon_r = \frac{\partial A}{\partial \pi} \varepsilon_\pi$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_A}{2 \frac{\partial A}{\partial r}} \quad \varepsilon_\pi = \frac{\varepsilon_A}{2 \frac{\partial A}{\partial \pi}}$$

$$\left| \frac{\partial A}{\partial r} \right| = |2\pi r| = 157.07963 \quad \left| \frac{\partial A}{\partial \pi} \right| = |r^2| = 25^2$$

$$\varepsilon_r = \frac{0.05}{2(157.07963)} = 0.16 \times 10^{-3} \quad \varepsilon_\pi = \frac{0.05}{2(25^2)} = 0.4 \times 10^{-4} \text{ (con 4 c.d.e.)}$$

8. Considere el sistema de punto flotante de la forma $x = \pm(0.b_1b_2b_3 \dots b_p) \times B^e$ donde

$$B = 10, \quad -2 \leq e \leq 1, \quad p = 2$$

Obtener la representación de:

$$x_1 = 12.3 \quad \text{K K K K K}$$

$$x_2 = 0.01354 \times 10^{-9} \quad \text{K K K K K}$$

$$x_3 = 0.003325 \quad \text{K K K K K}$$

Solución

Obtener la representación de:

$$x_1 = 12.3 \quad \text{K K K overflow K K}$$

$$x_2 = 0.01354 \times 10^{-9} \quad \text{K K underflow K K K}$$

$$x_3 = 0.003325 \quad \text{K K K K K } \mathbf{0.33 \times 10^{-2}}$$

9. Calcular x e y a partir del sistema:

$$x + \alpha y = 1$$

$$\alpha x + y = 0$$

- Resolver mediante Eliminación Gaussiana.
- Muestre las matrices L y U de Doolite.

Solución

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \alpha$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa

$$x_2 = -\alpha / (1 - \alpha^2)$$

$$x_1 = 1 + \alpha^2 / (1 - \alpha^2)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

10. Considera las siguientes líneas con instrucciones en MATLAB:

```
A = [2 1 1; 1 1 1;-1 -1 -1];  
b = [4 -3 3];  
A = [A b]; % punto 1  
aux=A(1,:); A(1,:)=A(2,:); A(2,:)=aux; % punto 2  
A(2,:)=A(2,)-2*A(1,:);  
A(3,:)=A(3,)+A(1,:) % punto 3
```

Muestre la matriz A tras la ejecución de los puntos 1, 2 y 3.

Solución

Punto 1 :

A =

```
1 1 1 -3  
0 -1 -1 10  
0 0 0 0
```

Punto 2 :

A=

```
1 1 1 -3  
2 1 1 4  
-1 -1 -1 3
```

Punto 3 :

A=

```
1 1 1 -3  
0 -1 -1 10  
0 0 0 0
```

**SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA
CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO
(PARTE B) (70 minutos - 10 Puntos)**

Problema 1

- a. El punto de impacto de un proyectil que es lanzado desde un avión puede ser calculado por la siguiente expresión:

$$x_0 = v \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Si $v = 300 \pm 0.5 \text{ ms}^{-1}$ $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ con una precisión de 0.05 y
 $h = 300 \pm 1 \text{ m}$. ¿Cuáles son los límites de variación de x_0 ?

Solución

$$v = 300 \quad \xi_v = 0.5 \quad g = 9.8 \quad \xi_g = 0.05 \quad h = 300 \quad \xi_h = 1$$

$$x = 2347.4$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 7.8247$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = v \sqrt{\frac{1}{2hg}} = 3.9123$$

$$\frac{\partial x}{\partial g} = -v \sqrt{\frac{h}{2g^3}} = -119.7644$$

$$\xi_x = \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right| \xi_v + \left| \frac{\partial x}{\partial h} \right| \xi_h + \left| \frac{\partial x}{\partial g} \right| \xi_g = 7.8447 * 0.5 + 3.9123 * 1 + 119.7644 * 0.05 = 13.8229$$

Variación de $x = 2347.4 \pm 13.8229$

- b. La posición de una partícula está dada por la siguiente función $y(t) = \sqrt{1-t}$ donde t está representado con 2 cifras decimales exactas. Determine el número de cifras decimales exactas que garantice la posición $y(t)$ cuando $t = 0.50$ s

Solución

$$y(t) = \sqrt{1-t}$$

$$t = 0.50 \text{ (2 c.d.e.)}$$

$$\varepsilon_t = 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_y = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_y = \left| \frac{t}{2\sqrt{1-t}} \right| \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_y = |0.707| \times 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_y \approx 0.00354 = 0.354 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

$$n = 2 \text{ c.d.e}$$

Problema 2

Para una representación estándar en simple precisión (IEEE-754) obtener:

a) La representación del número decimal 0.3.

Solución

$$0.3_{10} = 0.01001100110011\dots_2 = 1.00110011001100110011001x2^{-2}$$

$$\text{exponente} = -2 + 127 = 01111101$$

$$x = 0 \quad 01111101 \quad 00110011001100110011001$$

$$xx = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + 2^{-10} + \dots + 2^{-25}$$

b) Muestre el número siguiente al decimal 0.3 que tiene representación exacta. Muéstrelo como se guarda en el computador y en su forma decimal.

Solución

$$xs = 1.00110011001100110011010x2^{-2}$$

$$\text{exponente} = -2 + 127 = 01111101$$

$$x = 0 \quad 01111101 \quad 00110011001100110011010$$

$$xx = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + 2^{-10} + \dots + 2^{-24}$$

c) Obtener el mayor valor positivo subnormal en este sistema.

Solución

Mayor valor positivo “subnormal”

$$r = 0.111111111111111111111111x2^{-126}$$

$$\text{exponente} = 00000000$$

$$0 \quad 00000000 \quad 111111111111111111111111$$

Problema 3

Resolver usando aritmética de 5 dígitos significativos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Use Eliminación Gaussiana con y sin pivoteo parcial.

¿Por sus resultados, podría concluir si el sistema está bien condicionado?

Solución

$$AA = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad AA=[A \ b]$$

$$m_{21} = 3/0.0001 = 0.3 \times 10^5$$

$$m_{31} = 1/0.0001 = 0.1 \times 10^5$$

$$AA = \begin{bmatrix} 0.1 \times 10^{-3} & 1 & 1 & 0.20001 \times 10^1 \\ 0 & -0.29999 \times 10^5 & -0.29999 \times 10^5 & -0.6 \times 10^5 \\ 0 & -0.9998 & -0.9997 & -0.19998 \times 10^1 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = -0.9998 / (-0.29999 \times 10^5) = 0.33328$$

$$AA = \begin{bmatrix} 0.1 \times 10^{-3} & 1 & 1 & 0.20001 \times 10^1 \\ 0 & -0.29999 \times 10^5 & -0.29999 \times 10^5 & -0.6 \times 10^5 \\ 0 & \approx 0 & 0.10667 \times 10^1 & -0.12 \times 10^1 \end{bmatrix} == [U \ c]$$

Sustitución inversa

$$x_3 = -0.12 \times 10 / (0.10667 \times 10) = -0.11250 \times 10^1 = -1.1250$$

$$x_2 = (-0.6 \times 10^5 - (-0.29999 \times 10^5 * (-1.1250))) / (-0.29999 \times 10^5) = 0.31251 \times 10 = 3.1251$$

$$x_1 = (0.20001 \times 10 - (-1.1250 - 3.1251)) / (0.1 \times 10^{-3}) = 0$$

Empleando Pivoteo Parcial

$$AA = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas f2 con f1

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = 0.0001/3 = 0.33333 \times 10^{-4}$$

$$m_{31} = 1/3 = 0.33333$$

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 0.99997 & 0.99997 & 2.0000 \\ \approx 0 & 1.6667 & 1.6667 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas f3 con f2

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 1.6667 & 1.6667 & 2.0000 \\ \approx 0 & 0.99997 & 0.99997 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = 0.99997 / (1.6667) = 0.59997$$

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 1.6667 & 2.6667 & 2.0000 \\ \approx 0 & \approx 0 & -0.59997 & 0.80006 \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa

$$x_3 = 0.80006 / (-0.59997) = -1.3335$$

$$x_2 = (2.0000 - 2.6667 * (-1.3335)) / (1.6667) = 3.3336$$

$$x_1 = (3 - (-1.3335 + 3.3336)) / 3 = 0.33330$$

Resultados

| Solución exacta | Solución sin pivoteo | Solución con pivoteo |
|-----------------|----------------------|----------------------|
| 0.3333 | 0 | 0.3333 |
| 3.3335 | 3.1251 | 3.3335 |
| -1.3334 | -1.1250 | -1.3335 |

Los resultados demuestran que para la precisión de 5 dígitos la matriz está bien condicionada. Se minimizan los problemas de redondeo con el pivoteo.

Los Profesores